Verkettungen von optimalen algebraischen und sphärischen Codes bei Coderate 1/2

Dejan E. Lazic
Technische Universität Chemnitz-Zwickau,
Fakultät für Elektrotechnik und Informationstechnik,
Institut für Informationstechnik, D-09107 Chemnitz

Frank Pählke, Thomas Beth
Universität Karlsruhe, Fakultät für Informatik,
Institut für Algorithmen und Kognitive Systeme,
Am Fasanengarten 5, D-76128 Karlsruhe

3. März 1998

Motivation

Vorherrschend bei der Kanalcodierung sind **binäre Codes** mit BPSK-Modulation. **Nachteile:**

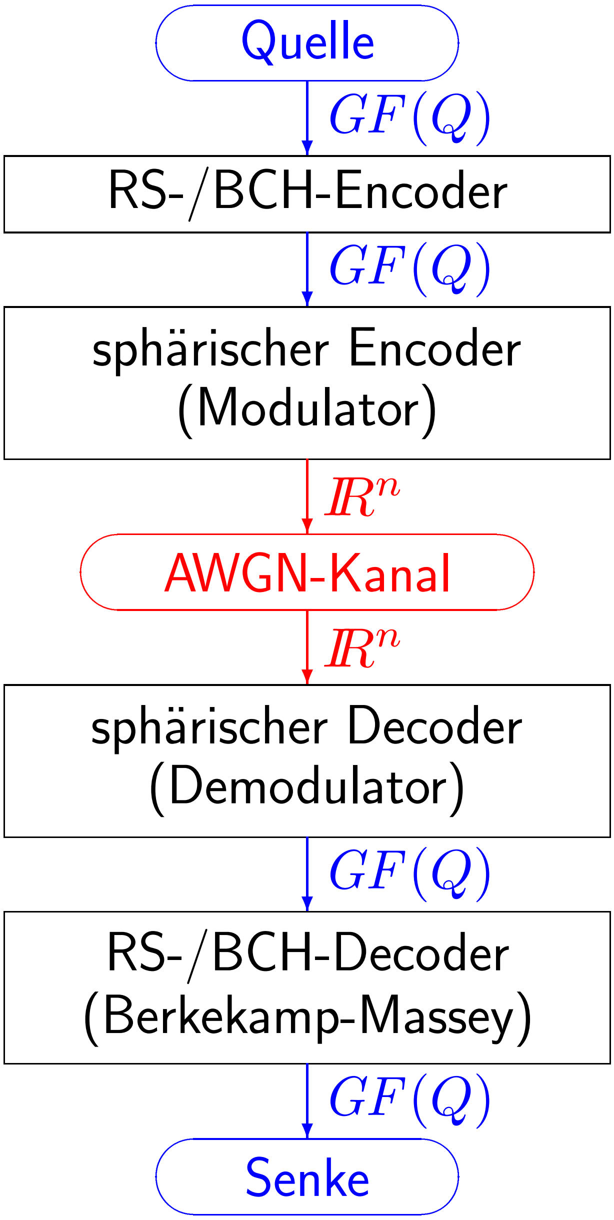
- Beschränkung der Gesamtcoderate auf $\mathcal{R} < 1$
- Beste binäre Codes (Turbo-Codes) sind sehr lang ($N = 2^{17} \approx 130000$). **Problem:** Verzögerung.

Vorteile mehrwertiger Codes:

- RS-Codes sind als äußere Codes asymptotisch optimal (theoretisch bewiesen).
- auch Gesamtcoderate $\mathcal{R} \geq 1$ möglich
- bei gleicher Länge und Coderate größeres Korrekturvermögen aufgrund größerer Minimaldistanz

Aber: Soft-decision-Decodierung ist schwierig bis unmöglich, denn der Viterbi-Algorithmus scheidet wegen Komplexität $O(Q^{N-K})$ aus.

Struktur der untersuchten Codeverkettungen



Sphärischer Code $\mathcal{S}$:

$$\forall \vec{x} \in \mathcal{S} : |\vec{x}| = 1$$
$$m = |\mathcal{S}| = Q$$
$$m \leq 256$$
$$n \leq 15$$

Parameter der untersuchten Codeverkettungen

Äußerer (algebraischer) Code:

- Coderate $R = \frac{K}{N} \operatorname{ld} Q$
- Normalisierte Coderate $\underline{R} = \frac{K}{N}$

Innerer (sphärischer) Code:

- Mächtigkeit $m = Q \leq 256$
- Coderate $r = \frac{\operatorname{ld} Q}{n} \in \left(\frac{1}{2}, 1\right]$
- Normalisierte Coderate $\underline{r} = \frac{1}{n}$

Gesamte Codeverkettung:

- Codelänge $\mathcal{N} = N \cdot n$
- Coderate $\mathcal{R} = \underline{R} \cdot r = \frac{K}{N} \cdot \frac{\operatorname{ld} Q}{n} \approx \frac{1}{2}$

Verwendete Decodierverfahren

Äußerer (algebraischer) Code:

- **hard-decision**-Decodierung mit Hilfe des Berlekamp-Massey-Algorithmus
- **„Kandidatenlisten“**-Decodierung (an den vom sphärischen Decoder als besonders unzuverlässig erkannten Positionen werden mehrere alternative Symbole durchprobiert)
- **GMD**-Decodierung (Algorithmus von Taipale und Pursley)

Innerer (sphärischer) Code:

- **Maximum-Likelihood**-Decodierung durch vollständige Suche, optional Weitergabe von soft-decision-Information an den äußeren Decoder

Ergebnisse

- Bei vergleichbarer Performance haben Verkettungen mit RS-Codes eine kürzere Gesamtlänge, mit BCH-Codes ein kleineres Symbolalphabet.

- **Beste erreichte Performance:**
3.5–$3.6\,\mathrm{dB}$ bei hard-decision-Decodierung

- **Beste Verkettungen:**
$Q = 256$, $\mathcal{N} \approx 3000$ (RS)
$Q = 64$, $\mathcal{N} \approx 40000$ (BCH)

- **Größtes Problem:** Fehlen eines effizienten Verfahrens zur gemeinsamen soft-decision-Decodierung des inneren und äußeren Codes

- GMD-Decodierung des äußeren Codes bringt bei den betrachteten Codeverkettungen (relativ große Coderate des inneren Codes) keine, Kandidatenlisten-Decodierung nur geringfügige Vorteile.

Erklärung der Ergebnisse

Asymptotisch ($n \to \infty$) gilt für optimale Codes:

$$SER = 2^{-nE(r)+o(n)} \quad (E(r) = \text{Fehlerexponent})$$

Aber: Für **kleine Codelängen** n und kleines E_b/N_0 steigt die SER mit wachsendem n, und kein Code mit $n \leq 8$ und $r > 1/2$ erreicht bei $E_b/N_0 \leq 3\,\mathrm{dB}$ die SER einer einfachen BPSK-Modulation!

Hinzu kommt:

- Je größer n ist, desto kürzer muß (bei gleicher Gesamtlänge $\mathcal{N}$) der äußere Code sein.
- Dieser **kürzere Code** muß also **mehr Fehler** korrigieren als ein binärer Code gleicher Rate.
- Die Hamming-Minimaldistanz $D_{H,\min}$ ist bei mehrwertigen Codes zwar größer, aber dies macht die genannten Nachteile nicht wett.

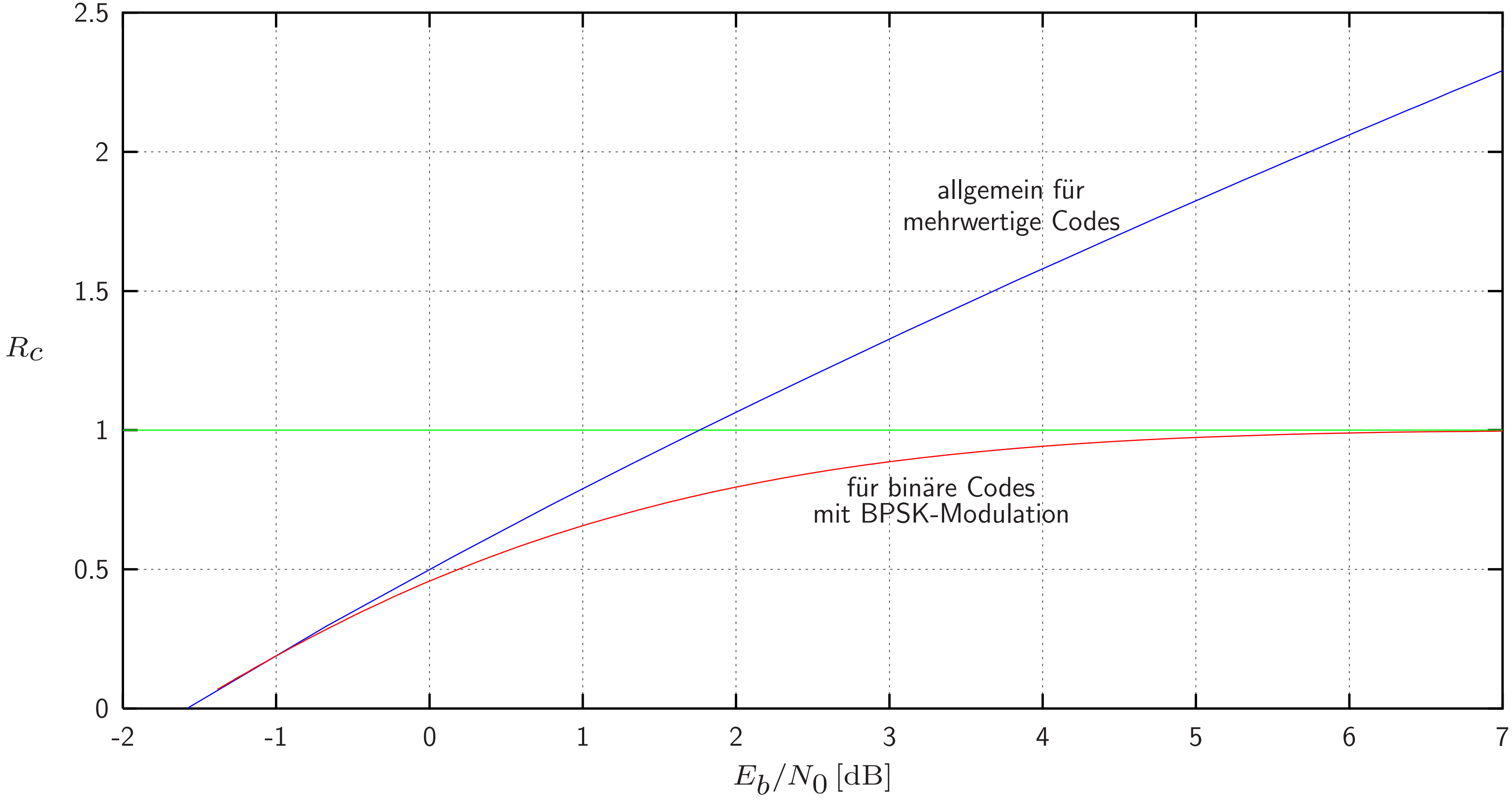
Fazit: Bei praktisch handhabbaren inneren Codes ($n \leq 8$) ist keine Verbesserung gegenüber binären Codes mit BPSK-Modulation zu erwarten.

Ausblick

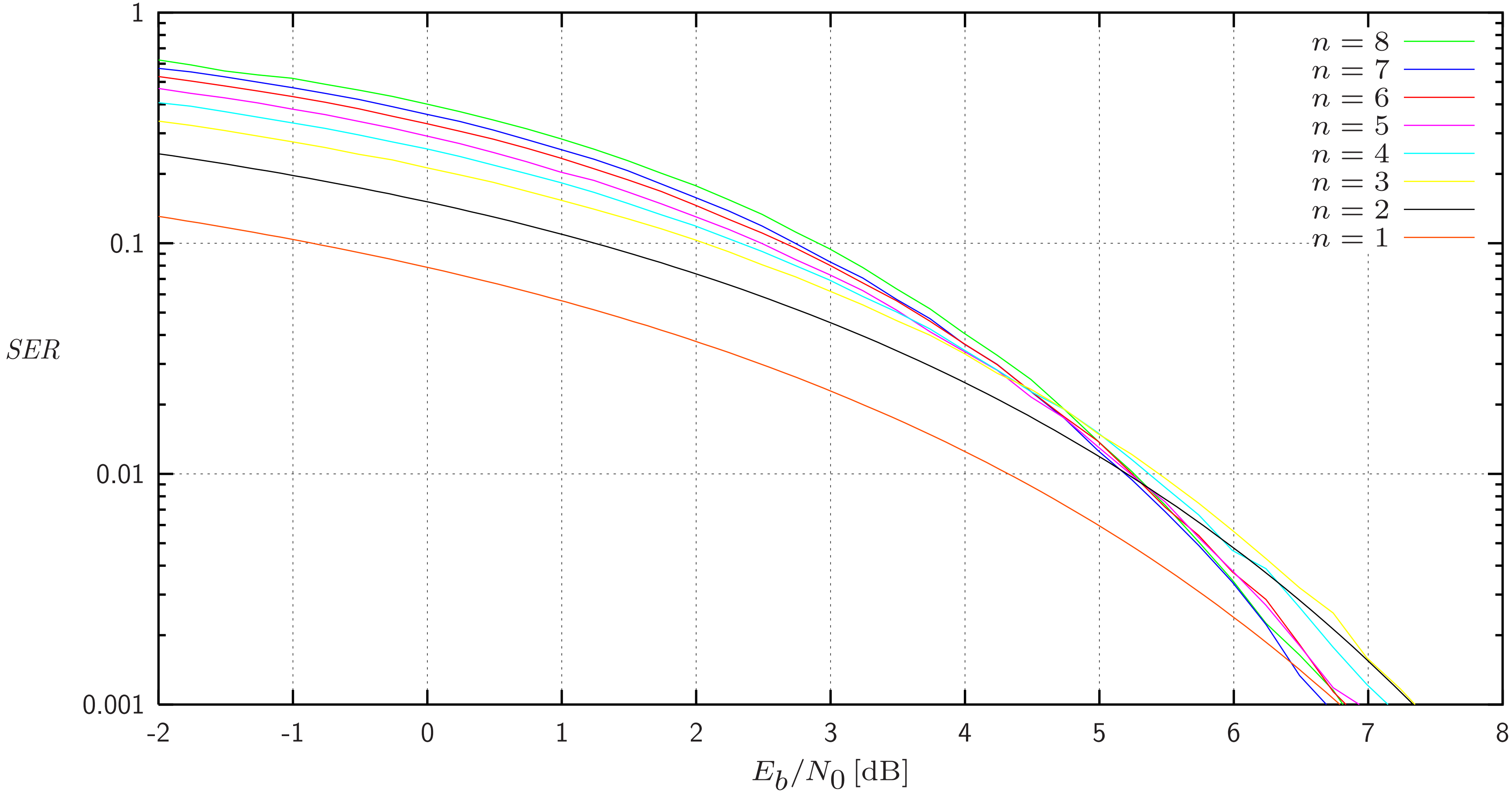
Derzeit untersucht: soft-decision-Decodierung von RS- und BCH-Codes

- **Idee:** Modifiziere den Code derart, daß eine sequentielle Decodierung möglich wird.
- **Nachteil:** Die Minimaldistanz $D_{H,\min}$ wird durch die Modifikationen geringer.
- **Weitere Ansätze:** Verkettungen mit Interleaving, Produktcodes, iterative Decodierung
- **Größtes Problem:** bei sequentieller Decodierung kein soft output (nötig für iterative Decodierung)
- bisher keine nennenswerten Erfolge

Kapazität eines AWGN-Kanals nach Shannon



Symbolfehlerrate für sphärische Codes mit $r = 1$

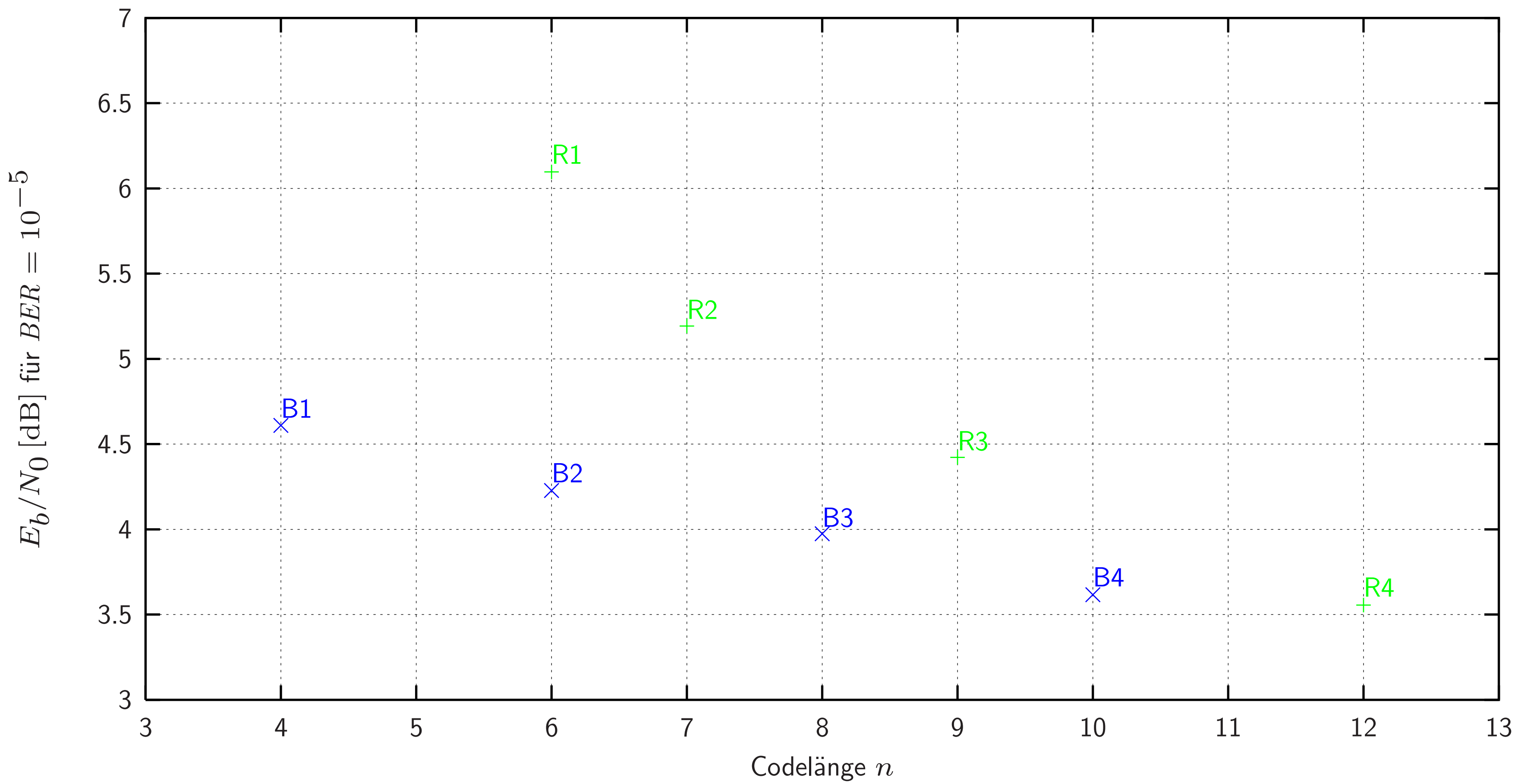


Die besten untersuchten Codes

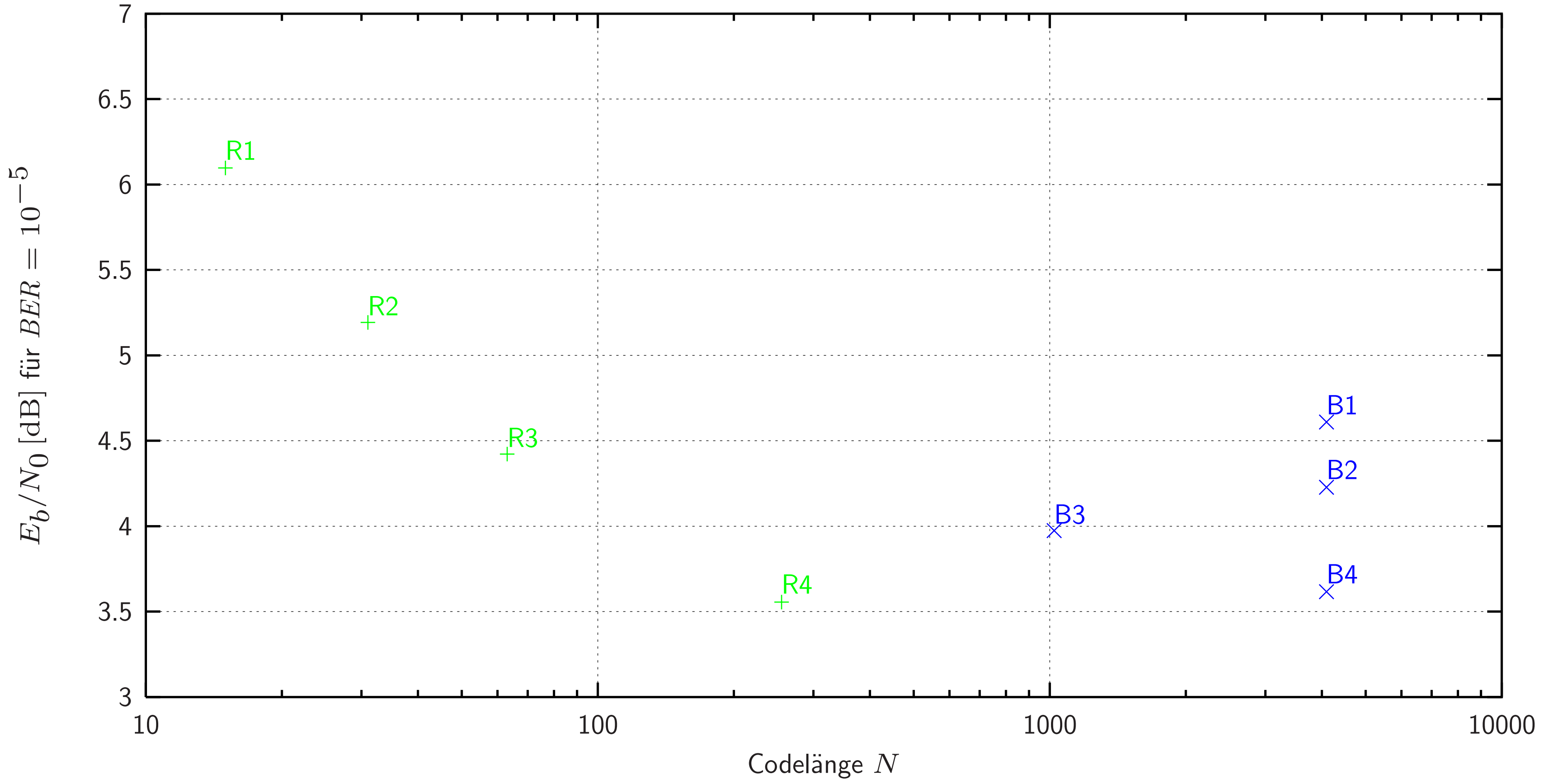
Bezeich-nung	innerer Code			äußerer Code			Gesamtcode		
	m	n	$d_{\min}$	N	K	$D_{H,\min}$	$\mathcal{N}$	$\mathcal{R}$	E_b/N_0 [dB] für $BER = 10^{-5}$
R1	16	6	1.24	15	11	5	90	0.489	6.07
R2	32	7	1.14	31	21	11	217	0.484	5.20
R3	64	9	1.10	63	47	17	567	0.497	4.43
R4	256	12	0.98	255	191	65	3060	0.499	3.57
B1	8	4	1.41	4095	2726	413	16380	0.499	4.67
B2	16	6	1.24	4095	3067	391	24570	0.499	4.24
B3	32	8	1.18	1023	815	113	8184	0.498	3.95
B4	64	10	1.10	4095	3411	361	40950	0.500	3.65

Für jeden Wert von $m = Q$ enthält die obige Tabelle die beste untersuchte Verkettung mit einem RS-Code (R1,...,R4) und die beste untersuchte Verkettung mit einem BCH-Code (B1,...,B4).

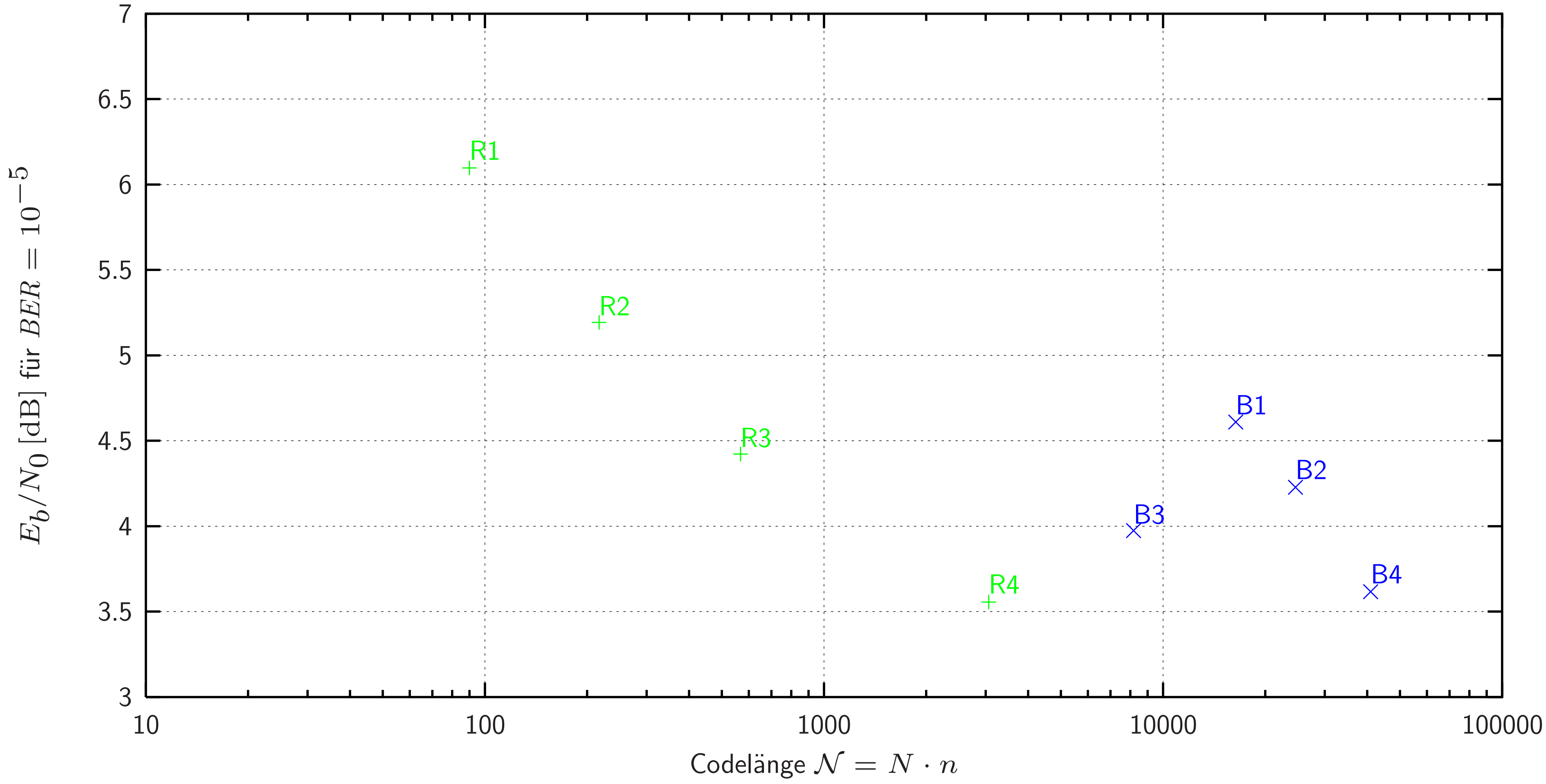
Codeperformance in Abhängigkeit von der Länge des inneren Codes



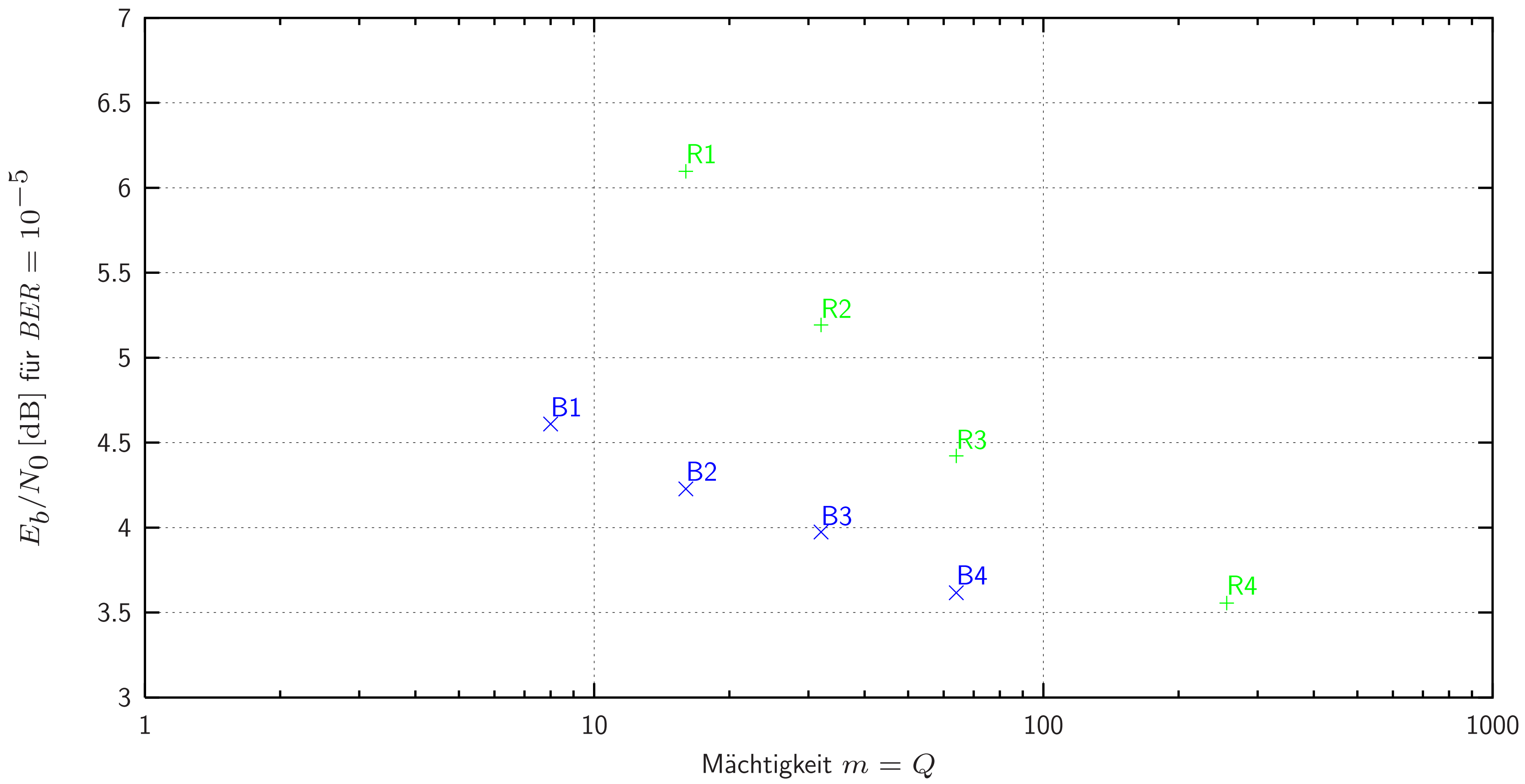
Codeperformance in Abhängigkeit von der Länge des äußeren Codes



Codeperformance in Abhängigkeit von der Gesamtlänge



Codeperformance in Abhängigkeit von der Mächtigkeit des Alphabets



Anordnung der Seiten